| | |
|---|---|
| Title | ぼれる集合論ニ於ケル分離ノ原理ニ就テ |
| Author(s) | 酒井, 政雄 |
| Citation | 全国紙上数学談話会. 65 p.24-p.31 |
| Issue Date | 1935-11-08 |
| oaire:version | VoR |
| URL | https://doi.org/10.18910/74180 |
| rights | |
| Note | |

# 258. ぼれる集合論ニ於ケル分離ノ原理ニ就テ

酒井 政 雄(北大)

分離ノ原理ハ解析集合論ニ於ケル最モ基本的ナ定理ノ一ツデアル。コノ原理ハ最近 *Novikoff*, *Liapounoff* 及 *Lusin* 等ニヨリ"*separabilité multiple*"(定義ノ参照)ノ場合ニ拡張サレタ。然ラバ, *Borel* 集合論ニ於ケル分離ノ原理ガ同様ノ拡張ヲ許スカドウカ?—— ニ就イテ *Sierpiński*: *Sur la separabilité multiple des ensembles mesurables* B. *Fund, Math.* *t.* 23 *pp.* 292—303 ニ於テソノ大部分ハ肯定的ノ結

果ガ與ヘラレタ。然シ可附番無限ノ場合ノ第二分離ノ原理（ぼれる集合論ニ於ケル）（定義２参照）ハ同氏ニヨッテモ取扱ハレズ、尚ソノ上，同論文ノ終リ及ビ *Ruziewicz: Sur la séparabilité multiple des ensembles, Fund. Math. t. 24, pp. 199—205* ノ初メニ，カカル場合ヘノ拡張ハ不可能デアルト云ッテイル。之レハ何カノ誤解デアラウ。（多分 *Liapounoff Dis* ノ條件ノ下ニテ不可能デアルト云フ意味デアラウ）。何トナレバ，以下証明スルヤウニ，コノ場合タハリ定理ハソノママ成立スルカラデアル。

定義１.

点集合Ｋノ部分集合ノ集合ヲ $\Phi$ トスル。

1°. *Lusin* ノ第一分離ノ原理：　$E_1, E_2 \in \Phi$, $E_1 E_2 = 0$ ナルトキ，$H_1$, $H_2$, $K-H_1$, $K-H_2 \in \Phi$, $H_1 \supset E_1$, $H_2 \supset E_2$, $H_1 H_2 = 0$ ナル $H_1$, $H_2$ ガ存在スル。

2°. *Novikoff* ノ分離：　$E_1, E_2, \cdots\cdots, E_m \in \Phi$, $E_1 \cdots\cdots E_m = 0$ ナルトキ $H_1, \cdots\cdots, H_m$ ガ存在シテ，$H_i$, $K-H_i \in \Phi$, $H_i \supset E_i$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, m)$, $H_1 H_2 \cdots\cdots H_m = 0$ トナル。

3°. *Liapounoff* ノ分離：　$E_1, E_2, E_3, \cdots\cdots \in \Phi$（可附番無限個）.，$E_1 E_2 E_3 \cdots\cdots = 0$ ニ對シテ $H_1, H_2, H_3, \cdots\cdots$ ガ存在シテ $H_i$，$K-H_i \in \Phi$, $H_i \supset E_i$, $(i=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ 且ツ $H_1 H_2 H_3 \cdots\cdots = 0$ トナル。

4°. *Liapounoff* ノ bis 分離: $E_1, E_2, E_3, \cdots\cdots \in \mathfrak{E}$, $\lim E_m = 0$ ニ對シテ $H_1, H_2, H_3, \cdots\cdots$ ガ存在シテ, $H_i$, $K - H_i \in \mathfrak{E}$, $H_i \supset E_i$, $(i = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ 且シ $\lim H_m = 0$ トナル。

定義 2.

1°. *Lusin* ノ第二分離原理: $E_1, E_2, \in \mathfrak{E}$ ニ對シテ, $H_1, H_2$ ガ存在シテ, $K - H_1$, $K - H_2 \in \mathfrak{E}$, $H_1 \supset E_1 - E_2$, $H_2 \supset E_2 - E_1$, $H_1 H_2 = 0$ トナル。

2°. *Lusin* ノ第二分離原理ノ拡張: $E_1, E_2, \cdots\cdots, E_m \in \mathfrak{E}$ ニ對シテ, $H_1, H_2, \cdots\cdots, H_m$ ガ存在シテ $K - H_i \in \mathfrak{E}$, $H_i \supset E_i - (E_1 E_2 \cdots\cdots E_m)$, $(i = 1, 2, \cdots\cdots, m)$ 且 $H_1 H_2 \cdots\cdots H_m = 0$ トナル。

3°. 可附番無限ノトキノ第二分離原理: 可附番無限個ノ $E_1, E_2, E_3, \cdots\cdots \in \mathfrak{E}$ ニ對シテ $H_1, H_2, H_3, \cdots\cdots$ ガ存在シテ, $K - H_i \in \mathfrak{E}$, $H_i \supset E_i - (E_1 E_2 E_3 \cdots\cdots)$, $(i = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ 且ツ $H_1 H_2 H_3 \cdots\cdots = 0$ トナル。

定理. *Metric space* ニ於テ $\mathfrak{E}$ ヲ $\alpha$ $(1 \leqq \alpha < \Omega)$ 次ノ *multiplicative* ノ *Borel* 集合トスル。コノ $\mathfrak{E}$ ニツイテ可附番無限ノ場合ノ第二分離原理ガ成立スル。尚, 同時ニ $E_1 E_2 \cdots\cdots = 0$ ナラバ *Liapounoff* ノ分離原理ガ成立スル。

証明.

$\mathfrak{E}$ ヲ $\alpha$ 次ノ *ambigu* ノ *Borel* 集合トスルト, $\mathfrak{E}$ ハ

$Körpert$ ナルノデ，亜ヲ $Körper$ トシ，亜$_\delta$ ∋ $E_1, E_2, \cdots\cdots$ ノトキ．亜$_\sigma$ ∋ $H_1, H_2, \cdots\cdots$ ガ存在シテ與ヘラレタ性質ヲモチ，且ツ $E_1 E_2 E_3 \cdots\cdots = 0$ ナラバ，此処ニ與ヘタ $H_1, H_2, \cdots\cdots$ ハ同時ニ ∈亜$_\delta$ トナルコトヲ証明スル。

$H_i$ ニツキ —— 亜$_\delta$ ヲ $E_1, E_2, \cdots\cdots$ ナルコトト，亜ガ $Körper$ ナルコトニヨリ

$E_i = E_i^1 E_i^2 E_i^3 \cdots\cdots$, $E_i^u \supset E_i^{u+1}$, $E_i^u \in$ 亜, $i, u = 1, 2, 3, \cdots\cdots$ トシテヨイ。コノトキ

$$F_i^u = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} E_j^u$$

トオク。コノトキ，$F_i^u$ ハ $F_i^u \in$ 亜，$F_i^u \supset F_i^{n+1}$，トナル。扨テ

(1) $H_i = E_i^1 (K - F_i^1) + E_i^2 (F_i^1 - F_i^2) + \cdots\cdots$ トスル．

之レガ求メル $H_i$，$i = 1.2, \cdots\cdots$，デアル。

$Klass$ ニツキ. —— 亜ハ $Körper$ ナルユエ (1) ノ右辺ノ各項ハ亜ニ属ス．ヨッテ $H_i \in$ 亜$_\sigma$、即チ $K - H_i$ ∈亜$_\delta$.

$E_1 E_2 E_3 \cdots\cdots = 0$ ( 入ハ ∈亜$_\sigma$－亜$_\delta$ ) ノトキハ

$K \supset E_i^1 \supset E_i^1 F_i^1 \supset E_i^2 F_i^1 \supset E_i^2 F_i^2 \supset \cdots\cdots \supset (E E^2 E^3 \cdots\cdots) = 0$. ナルユエ．( 次ノ※参照 )

$K - H^i = (K - E_i^1) + F_i^1 (E_i^1 - E_i^2) + F_i^2 (E_i^2 - E_i^3) + \cdots\cdots$ コノ式ノ右辺ノ各項ハ亜ニ属スルカラ．$K - H^i \in$ 亜$_\sigma$ ヨッテ $H^i \in$ 亜$_\delta$

$H_i \supset E_i - (E_1 E_2 \cdots\cdots)$ ニツイテ —— $E_i^n \supset E_i$, $E_i^n \supset E_i^{n+1}$

及ビ $F_i^n \supset F_i^{n+1}$ ヲ用ヒテ (1) ヨリ

$$H_i \supset E_i(K-F_i^1)+E_i(F_i^1-F_i^2)+\cdots\cdots$$

$$=E_i\left[K-(F_i^1F_i^2F_i^3\cdots\cdots)\right]$$

$$=E_i-E_i\times(F_i^1F_i^2F_i^3\cdots\cdots)$$

$$=E_i-(E_1^1E_1^2E_1^3\cdots\cdots) \quad ※$$

$$(E_2^1E_2^2E_2^3\cdots\cdots) \qquad E_i\times F_i^1F_i^2\cdots\cdots$$

$$(\quad E_3^2E_3^3\cdots\cdots) \qquad =E_1E_2E_3\cdots\cdots$$

$\cdots\cdots$ トナルコト。

$$\cdots\cdots$$

$$(E_i^1E_i^2\cdots\cdots E_i^{i-1}E_i^i\cdots\cdots)$$

$$=E_i-(E_1^1E_1^2E_1^3\cdots\cdots) \qquad \cdots\cdots$$

$$(E_2^1E_2^2E_2^3\cdots\cdots) \qquad \cdots\cdots$$

$$(E_3^1E_3^2E_3^3\cdots\cdots)$$

$$\cdots\cdots$$

$$(E_i^1E_i^2E_i^3\cdots\cdots)$$

$$\cdots\cdots$$

$$=E_i-(E_1E_2E_3\cdots\cdots)$$

$H_1H_2H_3\cdots\cdots=0$ ニツイテ —— モシ $H_1H_2\cdots\cdots\neq 0$ ナラバ共通部分ニ一点 $p$ ヲトル。$H_1\ni p$ ナルユエ、(1) 式デ $i=1$ ニシテ見ルト、$n\geq 1$ ガ存在シテ $E_1^n(F_1^{n-1}-F_1^n)\ni p$.
但シ $F_i^0$, $E_i^0$ 等ハ凡テ $K$ ニトル。依ツテ

(2) $\quad E_1^n\ni p,\ F_1^{n-1}\ni p,\ F_1^n\not\ni p$

(2) ノ第一式ト $E_1^{n-1}\supset E_1^n$ トヨリ、$E_1^{n-1}\ni p$.

(2) ノ第二式ト $F_1^{n-1}$ ノ定義ニヨリ $E_j^{n-1} \ni p$, $j=2,$ -----
----, $n$, 依ッテ $F_i^{n-1}$ ノ定義ニヨリ $F_i^{n-1} \ni p$, $i=1,2,3,$ -------
又 $F_n^m$ ノ 単調性ニヨリ

(3) $F_i^0 \supset F_i^1 \supset F_i^2 \supset \cdots\cdots \supset F_i^{n-1} \ni p$, $i=1,2,3,$ -------

(2) ノ第三式ニヨリ $k$ ($k \leqq n+1$) ガ存在シテ $E_k^n \ni p$.

$E_i^m$ ノ単調性ニヨリ

(4) $E_k^n \supset E_k^{n+1} \supset E_k^{n+2} \supset \cdots\cdots \ni p$

扨テ (1) ニヨリ

$$H_k = \sum_{m=1}^{n-1} E_k^m (E_k^{m-1} - F_k^m) + \sum_{m=n}^{\infty} E_k^m (F_k^{m-1} - F_k^m)$$

コノ式ノ右辺ノ第一項ハ (3) ニヨッテ $p$ ヲ含マズ, 第二項ハ (4) ニヨッテ $p$ ヲ含マズ. 依ッテ $H_k \ni p$. 之ハ $p$ ノ定義ニ反スル。

依ッテ $H_1 H_2 H_3 \cdots\cdots = 0$ トナル。

(証明了)

尚上述ノ Rugiewicz ノ論文デハ,

亜ガ Ring デ Lusin ノ第二分離原理ガ成立スルトキハ、Lusin ノ第二分離原理ノ拡張 (定義 2, 2°) ガ成立スル。

トイフコトガ面白イ方法デ証明サレテキルガ、次ノ如ク Novikoff ノ証明法ニヨッテモ証明サレル。念ノタメ記シテオキマス。コノ方ガ遥カニ簡単デアルト思ヒマス。

証明.

$m=2$ ノトキハ, Lusin ノ第二分離原理デ、コレハ假定ニヨッテ成立スル。$(m-1)$ ケノトキ成立スルトキ $m$ 個ノトキモ成立スルコトヲ示セバヨイ。

$E_1, E_2$ ニツキ, $K_1, K_2$ ガ存在シテ

$$K_1 \supset E_1-(E_1E_2), \quad K_2 \supset E_2-(E_1E_2)$$

$$K_1K_2=0, \quad K_1, K_2 \in \text{亜}_c$$

$(m-1)$ 個ノ $(E_1E_2), E_3, \cdots\cdots, E_m$ ニツキ $L_0, L_3, \cdots\cdots, L_m$ ガ存在シテ

$$L_0 \supset (E_1E_2)-(E_1E_2\cdots\cdots E_m)$$

$$L_3 \supset E_3-(E_1E_2\cdots\cdots E_m), \cdots\cdots, L_m \supset E_m-(E_1E_2\cdots E_m)$$

$$L_0L_3\cdots\cdots L_m=0, \quad L_0, L_3, \cdots\cdots, L_m \in \text{亜}_c.$$

此処デ, $H_1=K_1+L_0$, $H_2=K_2+L_0$, $H_3=L_3, \cdots\cdots, H_m=L_m$ トスル。

亜ガ Ring ナルユヱ, $\text{亜}_c$ モ亦 Ring デアル。依ッテ $H_1, H_2$, 及ビ $H_3, H_4, \cdots\cdots, H_m$ ハ凡テ $\in \text{亜}_c$.

$$H_1 = L_0+K_1 \supset \big(E_1-(E_1E_2)\big)+\big((E_1E_2)-(E_1\cdots\cdots E_m)\big)$$
$$= E_1-(E_1\cdots\cdots E_m)$$

$H_2$ モ同様. $H_3, \cdots\cdots, H_m$ ハ $L_3, \cdots\cdots L_m$ ト同ジモノナルユヱ、ソレヨリ同ジ様ナ式ガ成立スル。

$$H_1H_2\cdots\cdots H_m = (L_0+K_1)(L_0+K_2)L_3\cdots\cdots L_m$$
$$= L_0L_3\cdots\cdots L_m + K_1K_2L_3\cdots\cdots L_m = 0$$

(以上)

日本學士院記事(1934)第9号ノ功力先生ノ論文ニヨリ

マスト、任意ノ metric space ニ於ケル解析集合ハ Lusin ノ第二分離原理ヲ充スコトが証明サレテイマスカラ、上ノ結果ヨリ次ノコトが言ヘマス。

任意ノ metric space ニ於ケル解析集合 $E_1, E_2, \ldots\ldots E_m$ ニ對シテ、補解析集合 $H_1, H_2, \ldots\ldots, H_m$ が存在シテ

$$H_i \supset E_i - (E_1 E_2 \cdots\cdots E_m), \quad i = 1, 2, \ldots\ldots, m$$

$$H_1 H_2 \cdots\cdots H_m = 0$$

トナル。